ASÍNTOTAS Y RAMAS

Ejercicio nº 1.-

Halla las asíntotas verticales de:

$$f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$$

y sitúa la curva respecto a ellas.

Ejercicio nº 2.-

Halla las asíntotas verticales de la siguiente función y sitúa la curva respecto a ellas:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$$

Ejercicio nº 3.-

Halla las asíntotas verticales de la siguiente función y sitúa la curva respecto a ellas:

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x + 2)^2}$$

Ejercicio nº4.-

Averigua las asíntotas verticales de la siguiente función y sitúa la curva respecto a ellas:

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - x - 2}$$

Ejercicio nº 5.-

Dada la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$$

halla sus asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas.

Ejercicio nº 6.-

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, de la función:

$$f(x) = \frac{-x^3 + x}{2}$$

Representa gráficamente los resultados obtenidos.

Ejercicio nº 7.-

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes funciones y representa la información que obtengas:

a) $f(x) = (x+2)^4$
b) $f(x) = x - x^2$

Ejercicio nº 8.-

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to -\infty$, de las siguientes funciones y representa los resultados que obtengas:

a) $f(x) = (x-1)^3$
b) $f(x) = x^2 - x$

Ejercicio nº 9.-

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$ de la siguiente función y representa los resultados obtenidos:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

Ejercicio nº 10.-

Halla los límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, y representa las ramas correspondientes para la función:

$$f(x) = (3-x)^3$$

Ejercicio nº 11.-

Estudia el comportamiento de la siguiente función, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, y representa las ramas que obtengas:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{2x+1}$$

Ejercicio nº 12.-

Estudia y representa el comportamiento de la siguiente función cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$:

$$f(x) = \frac{1 - x^4}{x^2}$$

__Ejercicio nº 13.-__

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, de la siguiente función y representa los resultados que obtengas:

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x}{x^2 + 1}$$

__Ejercicio nº 14.-__

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, de la función :

$$f(x) = \frac{2x^3 + x}{1 - x}$$

Representa la información obtenida.

__Ejercicio nº 15.-__

Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x + 3}$$

halla sus ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, y representa los resultados obtenidos.

__Ejercicio nº 16.-__

Estudia y representa el comportamiento de la siguiente función cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$:

$$f(x) = \frac{1 - 3x}{2 - x}$$

__Ejercicio nº 17.-__

Estudia el comportamiento de la siguiente función, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, y representa las ramas que obtengas:

$$f(x) = \frac{x + 1}{2x^2 + 2}$$

__Ejercicio nº 18.-__

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, de la siguiente función y sitúa la curva respecto a ellas:

$$f(x) = \frac{x}{x + 2}$$

Ejercicio nº 19.-

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, de la siguiente función y representa los resultados que obtengas:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

Ejercicio nº 20.-

Dada la función:

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{x^3}$$

Estudia su comportamiento en $+\infty$ $y - \infty$

Ejercicio nº 21.-

La siguiente función tiene una asíntota oblicua. Hállala y sitúa la curva respecto a ella:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 1}$$

Ejercicio nº 22.-

Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 2}$$

halla su asíntota oblicua y representa la posición de la curva respecto a ella.

Ejercicio nº 23.-

a) La siguiente función, ¿tiene una asíntota horizontal o una asíntota oblicua?

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x + 2}$$

b) Halla la asíntota (horizontal u oblicua) y representa la posición de la curva respecto a ella.

Ejercicio nº 24.-

Halla la asíntota oblicua de la siguiente función y representa la posición de la curva respecto a ella:

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$$

Ejercicio nº 25.-

Estudia y representa el comportamiento de la siguiente función cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$. Si tiene alguna asíntota, representa la posición de la curva respecto a ella:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

SOLUCIONES EJERCICIOS DE ASÍNTOTAS Y RAMAS

Ejercicio nº 1.-

Halla las asíntotas verticales de:

$$f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$$

y sitúa la curva respecto a ellas.

Solución:

- $4 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2,\ x = 2.$

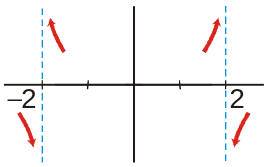
  Las asíntotas verticales son $x = -2$ y $x = 2$.

  Posición de la curva respecto a ellas:

$$\frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{(2 - x)(2 + x)}$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{4 - x^2} = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} \frac{1}{4 - x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{4 - x^2} = +\infty \qquad \lim_{x \to +2^+} \frac{1}{4 - x^2} = -\infty$$



Ejercicio nº 2.-

Halla las asíntotas verticales de la siguiente función y sitúa la curva respecto a ellas:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$$

Solución:

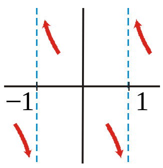
- $x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \ ; \quad x = 1.$

  Las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$.

- Posición de la curva respecto a ellas:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{2x + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x + 1}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{2x + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$



Ejercicio nº 3.-

Halla las asíntotas verticales de la siguiente función y sitúa la curva respecto a ellas:

$$f(x)=\frac{2x^2}{(x+2)^2}$$

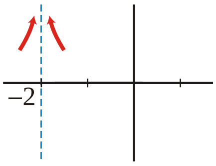
Solución:

- $(x+2)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$

  Solo tiene una asíntota vertical: $x=-2$

- Posición de la curva respecto a la asíntota:

  $\lim_{x\to -2^-} \frac{2x^2}{(x+2)^2}=+\infty \qquad \lim_{x\to -2^+} \frac{2x^2}{(x+2)^2}=+\infty$



Ejercicio nº4.-

Averigua las asíntotas verticales de la siguiente función y sitúa la curva respecto a ellas:

$$f(x)=\frac{x+3}{x^2-x-2}$$

Solución:

- $x^2-x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$

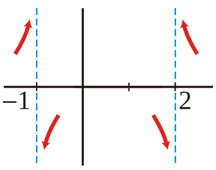
  Las asíntotas verticales son $x=-1$ y $x=2$.

  Posición de la curva respecto a las asíntotas:

  $\frac{x+3}{x^2-x-2}=\frac{x+3}{(x+1)(x-2)}$

  $\lim_{x\to -1^-} \frac{x+3}{x^2-x-2}=+\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{x+3}{x^2-x-2}=-\infty$

  $\lim_{x\to 2^-} \frac{x+3}{x^2-x-2}=-\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x+3}{x^2-x-2}=+\infty$



Ejercicio nº 5.-

Dada la función:

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2x+1}$$

halla sus asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas.

Solución:

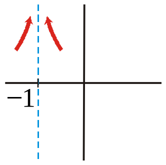
- $x^2+2x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$

  Solo tiene una asíntota vertical: $x=-1$

  Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$\frac{1}{x^2+2x+1}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{(x+1)^2}=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$$



Ejercicio nº 6.-

Halla las ramas infinitas, cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$, de la función:

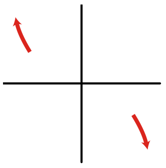
$$f(x)=\frac{-x^3+x}{2}$$

Representa gráficamente los resultados obtenidos.

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+x}{2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3+x}{2}=+\infty$$



Ejercicio nº 7.-

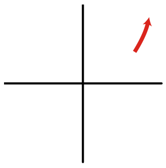
Halla las ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes funciones y representa la información que obtengas:

a) $f(x) = (x+2)^4$

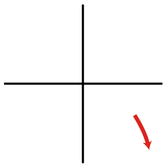
b) $f(x) = x - x^2$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2)^4 = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - x^2\right) = -\infty$



Ejercicio nº 8.-

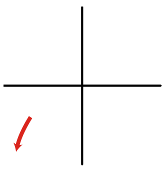
Halla las ramas infinitas, cuando $x \to -\infty$, de las siguientes funciones y representa los resultados que obtengas:

a) $f(x) = (x-1)^3$

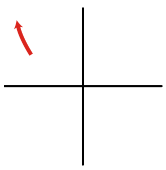
b) $f(x) = x^2 - x$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)^3 = -\infty$



b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 - x\right) = +\infty$



Ejercicio nº 9.-

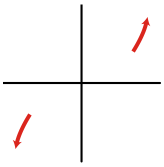
Halla las ramas infinitas, cuando $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$ de la siguiente función y representa los resultados obtenidos:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) = -\infty$$



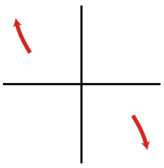
Ejercicio nº 10.-

Halla los límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, y representa las ramas correspondientes para la función:

$$f(x) = (3 - x)^3$$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} (3 - x)^3 = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} (3 - x)^3 = +\infty$$



Ejercicio nº 11.-

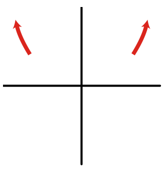
Estudia el comportamiento de la siguiente función, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, y representa las ramas que obtengas:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{2x + 1}$$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{2x + 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{2x + 1} = +\infty$$



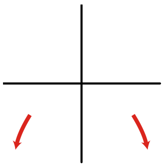
Ejercicio nº 12.-

Estudia y representa el comportamiento de la siguiente función cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$:

$$f(x) = \frac{1 - x^4}{x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x^4}{x^2} = -\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - x^4}{x^2} = -\infty$$



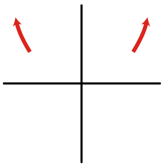
Ejercicio nº 13.-

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, de la siguiente función y representa los resultados que obtengas:

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x}{x^2 + 1}$$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 + 2x}{x^2 + 1} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 + 2x}{x^2 + 1} = +\infty$$



Ejercicio nº 14.-

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, de la función:

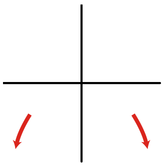
$$f(x) = \frac{2x^3 + x}{1 - x}$$

Representa la información obtenida.

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+x}{1-x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+x}{1-x} = -\infty$$



<u>Ejercicio nº 15.-</u>

Dada la función:

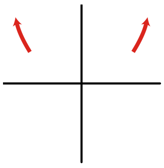
$$f(x) = \frac{x^3-1}{x+3}$$

halla sus ramas infinitas, cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$, y representa los resultados obtenidos.

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-1}{x+3} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-1}{x+3} = +\infty$$



<u>Ejercicio nº 16.-</u>

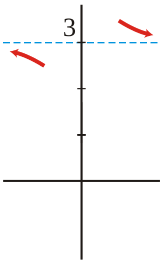
Estudia y representa el comportamiento de la siguiente función cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$:

$$f(x) = \frac{1-3x}{2-x}$$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{2-x} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-3x}{2-x} = 3$$



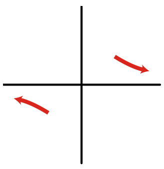
Ejercicio nº 17.-

Estudia el comportamiento de la siguiente función, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, y representa las ramas que obtengas:

$$f(x) = \frac{x+1}{2x^2+2}$$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2x^2+2} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{2x^2+2} = 0$$



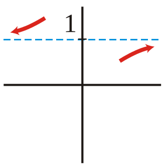
Ejercicio nº 18.-

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, de la siguiente función y sitúa la curva respecto a ellas:

$$f(x) = \frac{x}{x+2}$$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+2} = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+2} = 1$$



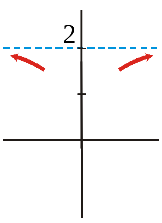
Ejercicio nº 19.-

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, de la siguiente función y representa los resultados que obtengas:

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1}$$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+1} = 2$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+1} = 2$$



Con calculadora podemos comprobar que:

- Dando valores muy grandes y positivos $(x \to +\infty)$, la curva va por debajo de la asíntota $y = 2$.
- Dando valores muy grandes y negativos $(x \to -\infty)$, la curva va por debajo de la asíntota $y = 2$.

Ejercicio nº 20.-

Dada la función:

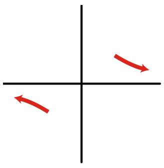
$$f(x) = \frac{1 + x^2}{x^3}$$

Estudia su comportamiento en +∞ y − ∞

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + x^2}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1 + x^2}{x^3} = 0$$



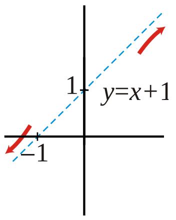
Ejercicio nº 21.-

La siguiente función tiene una asíntota oblicua. Hállala y sitúa la curva respecto a ella:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 1}$$

Solución:

- $\frac{x^2 + 2x}{x + 1} = x + 1 + \frac{-1}{x + 1} \quad \to \quad$ Asíntota oblicua: $y = x + 1$
- Cuando $x \to +\infty$, $\frac{-1}{x + 1} < 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.
- Cuando $x \to -\infty$, $\frac{-1}{x + 1} > 0 \quad \Rightarrow \quad$ La curva está por encima de la asíntota.
- Representación:



Ejercicio nº 22.-

Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 2}$$

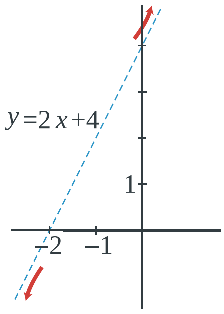
halla su asíntota oblicua y representa la posición de la curva respecto a ella.

Solución:

- $\frac{2x^2 + 1}{x - 2} = 2x + 4 + \frac{9}{x - 2} \quad \rightarrow \quad$ Asíntota oblicua $y = 2x + 4$

- Cuando $x \rightarrow +\infty$, $\frac{9}{x-2} > 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.
- Cuando $x \rightarrow -\infty$, $\frac{9}{x-2} < 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Representación:



Ejercicio nº 23.-

c) La siguiente función, ¿tiene una asíntota horizontal o una asíntota oblicua?

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x + 2}$$

d) Halla la asíntota (horizontal u oblicua) y representa la posición de la curva respecto a ella.

Solución:

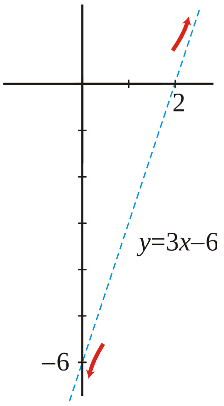
a) Como el grado del numerador es una unidad más que el grado del denominador, la función tiene una asíntota oblicua.

- $\frac{3x^2 - 2}{x + 2} = 3x - 6 + \frac{10}{x + 2} \quad \rightarrow \quad$ Asíntota oblicua $y = 3x - 6$

- Cuando $x \rightarrow +\infty$, $\frac{10}{x+2} > 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

- Cuando $x \rightarrow -\infty$, $\frac{10}{x+2} < 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Representación:



Ejercicio nº 24.-

Halla la asíntota oblicua de la siguiente función y representa la posición de la curva respecto a ella:

$$f(x)=\frac{2x^3}{x^2-1}$$

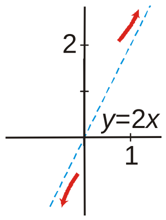
Solución:

- $\frac{2x^3}{x^2-1}=2x+\frac{2x}{x^2-1} \quad \rightarrow \quad$ Asíntota oblicua $y=2x$

- Cuando $x \rightarrow +\infty, \quad \frac{2x}{x^2-1}>0 \quad \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

- Cuando $x \rightarrow -\infty, \quad \frac{2x}{x^2-1}<0 \quad \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Representación:



Ejercicio nº 25.-

Estudia y representa el comportamiento de la siguiente función cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$. Si tiene alguna asíntota, representa la posición de la curva respecto a ella:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$$

Solución:

- $\dfrac{x^3}{x^2+1} = x + \dfrac{-x}{x^2+1} \quad \to \quad$ Asíntota oblicua $y = x$

- Cuando $x \to +\infty$, $\dfrac{-x}{x^2+1} < 0 \quad \Rightarrow \quad$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Cuando $x \to -\infty$, $\dfrac{-x}{x^2+1} > 0 \quad \Rightarrow \quad$ La curva está por encima de la asíntota.

- Representación: